

Q3 Si consideri il numero complesso $w = \frac{4}{i - \sqrt{3}}$

- Determinare la forma algebrica di w
- Determinare la forma trigonometrica di w
- Calcolare w^7, w^{100}
- Calcolare le radici quinte e le radici tredicesime complesse di w

svolgimento: a) $w = \frac{4}{- \sqrt{3} + i} \cdot \frac{- \sqrt{3} - i}{- \sqrt{3} - i} = \frac{-4\sqrt{3} - 4i}{4} = -\sqrt{3} - i$ forma algebrica di w

b) $|w| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

Determiniamo un argomento φ di w

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(w)}{|w|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{7}{6}\pi$$

$w = 2 \left(\cos \left(\frac{7}{6}\pi \right) + i \sin \left(\frac{7}{6}\pi \right) \right)$ forma trigonometrica di w

c) Formule di De Moivre

$$\begin{aligned} w^7 &= 2^7 \left(\cos \left(\frac{49}{6}\pi \right) + i \sin \left(\frac{49}{6}\pi \right) \right) = 2^7 \left(\cos \left(8\pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(8\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &\quad \uparrow 49 = 8 \cdot 6 + 1 \\ &= 2^7 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2^7 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2^6 (\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^{100} &= 2^{100} \left(\cos \left(\frac{700}{6}\pi \right) + i \sin \left(\frac{700}{6}\pi \right) \right) \\ &= 2^{100} \left(\cos \left(116\pi + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(116\pi + \frac{2}{3}\pi \right) \right) \\ &\quad \uparrow 700 = 116 \cdot 6 + 4 \end{aligned}$$

$$= 2^{100} \left(\cos \left(\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) \right) = 2^{100} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2^{99} (-1 + \sqrt{3}i)$$

d) Denotiamo con z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 le radici complesse quinte di w

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[5]{2} \left(\cos \left(\frac{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi}{5} \right) \right) \\ &= \sqrt[5]{2} \left(\cos \left(\frac{7}{30}\pi + \frac{2}{5}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{7}{30}\pi + \frac{2}{5}k\pi \right) \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Denotiamo con $z'_0, z'_1, \dots, z'_{12}$ le radici tredicesime complesse di w

$$z'_k = \sqrt[13]{2} \left(\cos \left(\frac{\frac{7}{6}\pi + \frac{2}{13}k\pi}{13} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{7}{6}\pi + \frac{2}{13}k\pi}{13} \right) \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, 12$$

Definizioni Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f(A)$

f è INFINITESIMA per $x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

f è INFINITA per $x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Notazione o-piccolo

Siano $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f(A)$

Scriviamo $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ovvero $\frac{f}{g}$ è infinitesimo per $x \rightarrow x_0$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

in particolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

in particolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Come ricostruiamo i limiti notevoli usando la notazione o-piccolo?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - x = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

possiamo pensare al termine $o(x)$ come all'errore del committente approssimando $\sin x$ con x per $x \rightarrow 0$.

SPOILER: con la formula di Taylor saremo in grado di descrivere $o(x)$ molto più precisamente!

Limiti notevoli con la notazione o-piccolo

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\tan x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\arcsin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\arctan x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Definizione (ASINTOTI ORIZZONTALI)

Siano $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

1) se A è illimitato superiormente (cioè $+\infty \in \text{Dz}(A)$) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1$ diciamo che la retta di equazione $y = l_1$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \rightarrow +\infty$ al grafico di f

2) se A è illimitato inferiormente (cioè $-\infty \in \text{Dz}(A)$) e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2$ diciamo che la retta di equazione $y = l_2$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \rightarrow -\infty$ al grafico di f

Esempi di asintoti orizzontali (funzioni elementari)

- $y = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) , $y=0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$ di $\frac{1}{x^n}$
- $y=0$ è asintoto orizzontale di $y=a^x$ per $x \rightarrow -\infty$ se $a > 1$
per $x \rightarrow +\infty$ se $a \in (0,1)$
- $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ di $\arctan x$
- $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$ di $\arctan x$

Definizione (ASINTOTO VERTICALE)

Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$

- 1) se $x_0 \in \text{Dsr}^-(A)$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \in \{\pm\infty\}$ diciamo che f ha un ASINTOTO VERTICALE SINISTRO per $x \rightarrow x_0$ oppure $x=x_0$ è un asintoto verticale sinistro al grafico di f
- 2) se $x_0 \in \text{Dsr}^+(A)$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \{\pm\infty\}$ diciamo che f ha un ASINTOTO VERTICALE DESTRO per $x \rightarrow x_0$ oppure $x=x_0$ è un asintoto verticale destro al grafico di f
- 3) se $x_0 \in \text{Dsr}^+(A) \cap \text{Dsr}^-(A)$ diciamo che f ha un ASINTOTO VERTICALE per $x \rightarrow x_0$ se $x=x_0$ è asintoto verticale sia destro che sinistro al grafico di f

Esempi di asintoti verticali (funzioni elementari)

- $x=0$ è asintoto verticale al grafico di $\frac{1}{x^n}$
- $x=0$ è asintoto verticale destro al grafico di $\log_a x$
- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è asintoto verticale al grafico di $\tan x$ $\forall k \in \mathbb{Z}$
- $x = k\pi$ è asintoto verticale al grafico di $\cotan x$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

Esercizi sui limiti

1. a) Determinare il dominio di $f(x) = \frac{x-1}{x^4-4x^2}$
- b) Trovare l'insieme delle soluzioni di $f(x) \geq 0$
- c) Calcolare i limiti di f nei punti di frontiera del dominio e dire se ci sono asintoti verticali/orizzontali al grafico di f

Svolgimento: a) c.e. $x^4 - 4x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \wedge x^2 \neq 4$
 $\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2$

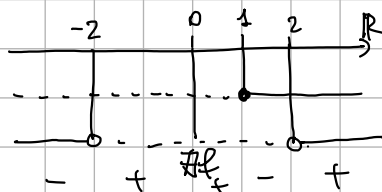
$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

- b) $f(x) \geq 0$ studio del segno

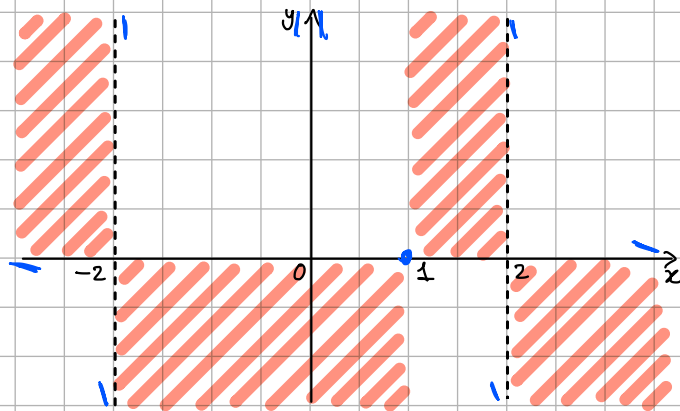
$$N \geq 0: x \geq 1$$

$$D > 0: x^2(x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow (x \neq 0 \wedge x^2 - 4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$



$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \vee 0 < x \leq 1 \vee x > 2$$



il grafico della funzione f non si trova nella regione in rosso

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^4 - 4x^2} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0^- , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^4 - 4x^2} = 0^+$$

$y=0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -2 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ è asintoto verticale} \quad \text{e} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 2 \text{ è asintoto verticale} \quad \text{e} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

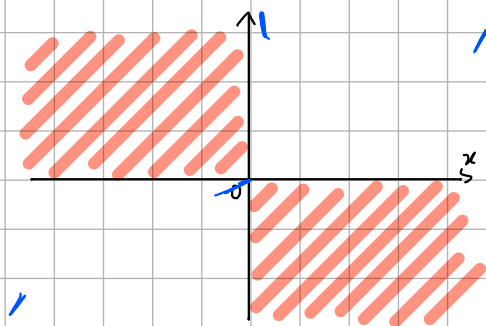
2. a) Determinare il dominio di $f(x) = x^3 e^{\frac{1}{x}}$

b) Determinare l'insieme delle soluzioni di $f(x) \geq 0$

c) Calcolare i limiti di f nei punti di frontiera/borda del dominio

supplemento: a) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$b) f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 e^{\frac{1}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$



$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 e^{\frac{1}{x}} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 e^{\frac{1}{x}} \stackrel{[0; \infty]}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^3 e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^3} = +\infty \quad \text{gerarchia degli infiniti}$$

$\downarrow$
 cambio di variabile
 $t = \frac{1}{x}$ se $x \rightarrow 0^+$ allora $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln x = -\infty \quad \text{perché } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 3x^4 + 15) \stackrel{[-\infty; \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{15}{x^5}\right) = -\infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3}{7x^3 + x^4} \stackrel{[\infty; \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^4 + 7x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{1 + \frac{7}{x}} = 0^+$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{5x^4 - 1000} \stackrel{[\infty; \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1}{5x^4 - 1000} = \frac{1}{5}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^5} \stackrel{[\infty; \infty]}{=} +\infty \quad \text{gerarchia degli infiniti}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^9} \stackrel{[\infty; \infty]}{=} +\infty \quad \text{gerarchia degli infiniti}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_2 x)^4}{3^x} \stackrel{[\infty; \infty]}{=} 0^+ \quad \text{gerarchia degli infiniti}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + \sqrt[3]{1+x^6} + \sqrt{x+1}}{7x^8 + \ln x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{11}{10}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{\left(\frac{11}{10}\right)^x} \cdot \frac{1 + \sqrt[3]{\frac{1+x^6}{x^6}} + \sqrt{\frac{x+1}{x^6}}}{\frac{7x^8}{\left(\frac{11}{10}\right)^x} + \frac{\ln x}{\left(\frac{11}{10}\right)^x} + \left(\frac{10}{3}\right)^x + 1}$$

$\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$
 $\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$
 $\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{\left(\frac{11}{10}\right)^x} = 0^+ \quad \text{gerarchia degli infiniti}$$

Proposizione (INFINITESIMA VS LIMITATA)

Siano $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{pr}(A)$. Supponiamo che

• f è infinitesima per $x \rightarrow x_0$, cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

• g è limitata definitivamente per $x \rightarrow x_0$, cioè

$$\exists U \in \mathcal{U}_{x_0} \quad \exists M > 0 \quad \text{talché} \quad \forall x \in U \cap A, x \neq x_0 : |g(x)| \leq M$$

$$\text{Allora } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{perché } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ è limitata}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x + \arctan x + e^{-x} + 2^x}{3 \ln |x| + (\ln |x|)^4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos(-t) + \arctan(-t) + e^t + 2^{-t}}{3 \ln |t| + (\ln |t|)^4}$$

$t = -x$
 se $x \rightarrow -\infty$ allora $t \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos t - \arctan t + e^t + 2^{-t}}{3 \ln t + (\ln t)^4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{(\ln t)^4} \cdot \frac{\frac{\cos t}{e^t} - \frac{\arctan t}{e^t} + 1 + (2e)^{-t}}{\frac{3}{(\ln t)^3} + 1}$$

$\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$
 $\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{(\ln t)^4} = +\infty$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln x + (\ln x)^3 + \frac{1}{2} (\ln x)^4}{x + \ln(\ln x)} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t + t^3 + \frac{t^4}{2}}{e^t + \ln t}$$

$$t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$$

so $x \rightarrow +\infty$ also $t \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4}{e^t} \cdot \frac{\frac{5}{t^3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{\ln t}{e^t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{e^t} = 0^+$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + x) \ln x \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{3x^2 \ln x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{x \ln x}_{\rightarrow 0} \right] = 0$$